# CAPM i APT

Ekonometria finansowa

# Literatura

- Elton, Gruber, Brown, Goetzmann (2007) Modern portfolio theory and investment analysis, John Wiley and Sons. (rozdz. 13-16 [, 5, 7])
- Campbell, Lo, MacKinlay (1997) The econometrics of financial markets, Princeton University Press. (rozdz. 5, 6)
- Cuthbertson, Nitzsche (2010) Quantitative financial economics…, John Wiley and Sons (rozdz. 5 i 8)

# Capital Asset Pricing Model

- Autorzy (niezależnie)
  - Sharpe (1964)
  - Lintner (1965)
  - Mossin (1966)

- APT
  - Ross (1976, 1977)

# Zastosowania CAPM

- Odpowiednia miara ryzyka dla każdego instrumentu, relacja między stopą zwrotu i ryzykiem dla każdego instrumentu

- Pozwala wyliczyć oczekiwaną stopę zwrotu (szacowanie kosztu kapitału, ocena portfela inwestycyjnego, analizy zdarzeń)

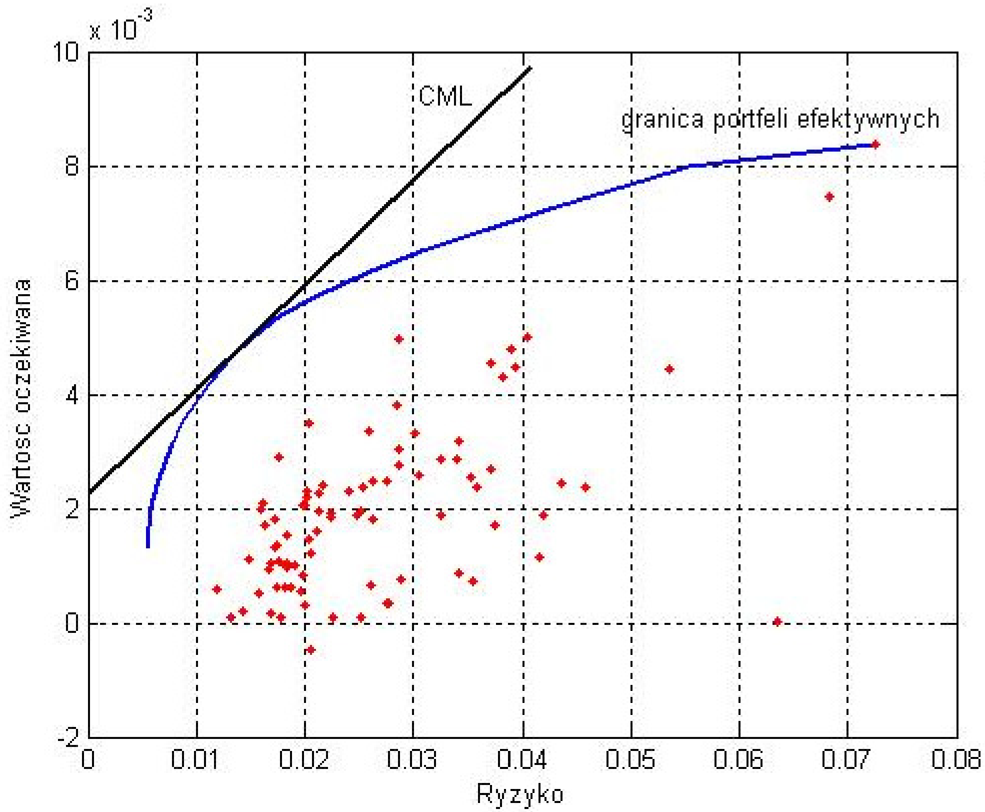
# Założenia CAPM

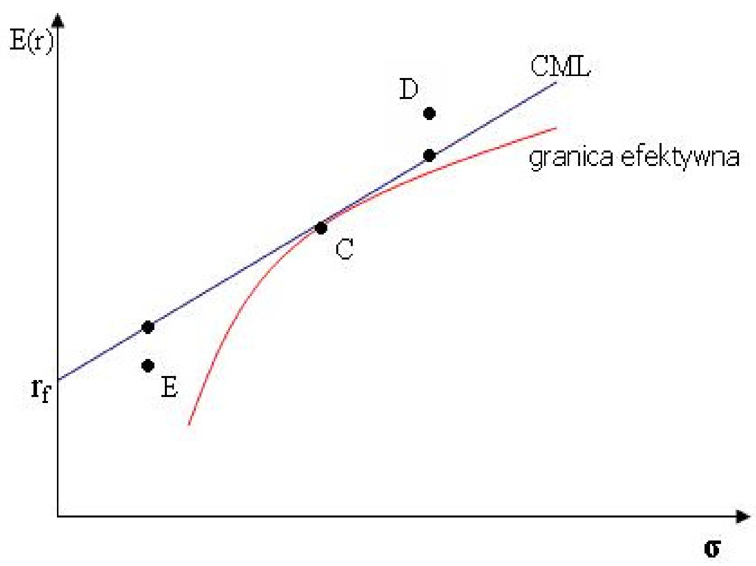
- Brak kosztów transakcyjnych
- Aktywa finansowe nieskończenie podzielne
- Brak podatku dochodowego
- Pojedynczy inwestor nie jest w stanie zmienić ceny instrumentu finansowego (konkurencja doskonała)
- Inwestorzy podejmują decyzje wyłącznie na podstawie wartości oczekiwanych zwrotów i odchyleń standardowych swoich portfeli

# Założenia CAPM (c.d.)

- Krótka sprzedaż nieograniczona
- Nieograniczona możliwość pożyczania po stopie procentowej bez ryzyka
- Inwestorzy są homogeniczni w swoich oczekiwaniach dotyczących:
  - stóp zwrotu, odchyleń standardowych, korelacji między instrumentami w danym okresie
  - okresu oceny inwestycji (horyzont inwestycyjny)
- Wszystkie aktywa są na sprzedaż

# CAPM – krótkie wprowadzenie




Źródło: http://kupakcje.pl/?p=147

# CAPM – krótkie wprowadzenie

- Granica portfeli efektywnych (efficient frontier)
- Prosta CML (capital market line) wyznacza model CAPM:

$$\overline{R}_e = R_F + \frac{\overline{R}_M - R_F}{\sigma_M}\sigma_e \qquad = R_F + \frac{\sigma_e}{\sigma_M}(\overline{R}_M - R_F)$$

- Portfel efektywny leży na prostej CML

# Interpreptacja

$$\overline{R}_e = R_F + \frac{\overline{R}_M - R_F}{\sigma_M}\sigma_e$$

(Oczekiwany zwrot)=(cena czasu)+(cena ryzyka)x(wielkość ryzyka)

- Wszyscy inwestorzy utrzymują identyczny portfel ryzykownych aktywów – portfel rynkowy (market portfolio)

# CAPM – krótkie wprowadzenie

- Dla pojedynczego instrumentu lub portfela $i$ (efektywnego lub nieefektywnego):

$$\overline{R}_i = R_F + \beta_i(\overline{R}_M - R_F)$$

# Wyprowadzenie (szybkie)

- Prawdziwy jest model jednoczynnikowy

$$\overline{R_i} = \alpha + \beta_i \overline{R_M}$$

- Stopa zwrotu z portfela $i$ jest liniową funkcją $\beta_i$

$$\overline{R_i} = a + b\beta_i$$

- Dla inwestycji bez ryzyka: $\beta_i = 0$

$$R_F = a + b(0)$$

# Wyprowadzenie (szybkie) c.d.

- Dla inwestycji w portfel rynkowy: $\beta_i = 1$

$$\overline{R}_M = a + b(1)$$

$$b = (\overline{R}_M - a) = (\overline{R}_M - R_F)$$

- Czyli prawdziwy jest model:

$$\overline{R}_i = R_F + \beta_i(\overline{R}_M - R_F)$$

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \qquad \overline{R}_i = R_F + \left(\frac{\overline{R}_M - R_F}{\sigma_M}\right)\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$$

# Interpretacja „bety”

- Miara zależności zwrotu z portfela od zwrotu z portfela rynkowego
- Indeks ryzyka systematycznego/ niedywersyfikowalnego (systematic risk)

- Inwestor oczekuje dodatkowego zwrotu za ryzyko niedywersyfikowalne a nie za to, które da się usunąć poprzez dywersyfikację portfela

# Rozszerzenia CAPM

- Krótka sprzedaż niedozwolona – brak wpływu
- Niemożliwe pożyczanie po stopie wolnej od ryzyka: $\overline{R}_i = \overline{R}_Z + \beta_i(\overline{R}_M - \overline{R}_Z)$

  → „zero-beta CAPM" / „two-factor model"
- Opodatkowanie zysków
- Heterogeniczne oczekiwania
- Wielookresowy CAPM, Multi-beta CAPM,
- „Consumption-oriented CAPM", itp.

# Wyniki empiryczne

- Założenie: model rynkowy prawdziwy

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + e_{it}$$

- Wartość oczekiwana z modelu:

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_M$$

- po odjęciu równań powyżej:

$$R_{it} = \overline{R}_i + \beta_i (R_{Mt} - \overline{R}_M) + e_{it}$$

ale $\overline{R}_i = R_F + \beta_i (\overline{R}_M - R_F)$

- Końcowy model: $R_{it} = R_F + \beta_i (R_{Mt} - R_F) + e_{it}$

$$R_{it} - R_F = \beta_i (R_{Mt} - R_F) + e_{it}$$

# Sposoby szacowania parametrów modelu CAPM

- standardowy CAPM
  - Kowariancja $R_i$ i $R_m$ oraz wariancja $R_m$ z próby
  - KMNK
  - model regresji + GARCH
- warunkowy CAPM
  - EWMA
  - MGARCH (np. GARCH-BEKK), GARCH-M
  - UMM
  - modele przestrzeni stanów

# Sposoby szacowania CAPM (1)

Model CAPM:

$$E(R_{it}) - R_F = \beta_i (E(R_{Mt}) - R_F)$$

można zapisać wykorzystując własności statystyczne portfeli jako:

$$E(R_{it}) - R_F = \left[ \frac{\mathrm{cov}(R_{it}, R_{Mt})}{\mathrm{var}(R_{Mt})} \right] (E(R_{Mt}) - R_F)$$

lub:

$$R_{it} - R_F = \beta_i (R_{Mt} - R_F) + e_{it}$$

# Sposoby szacowania CAPM (2)

- Kowariancja *$R_i$* i *$R_m$* oraz wariancja *$R_m$* z próby

$$E(R_{it} - r_t) = \frac{cov(R_{it}, R_{mt})}{var(R_{mt})} E(R_{mt} - r_t)$$

$$\beta_i = \frac{cov(R_{it}, R_{mt})}{var(R_{mt})}$$

- KMNK

$$R_{it} - r_t = \alpha + \beta(R_{mt} - r_t) + \varepsilon_t \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{R_i} - \mathbf{r} \qquad \mathbf{X} = [\mathbf{1} \quad (\mathbf{R_m} - \mathbf{r})\,]$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y})$$

# Sposoby szacowania CAPM (3)

- Expotential Weighted Moving Average

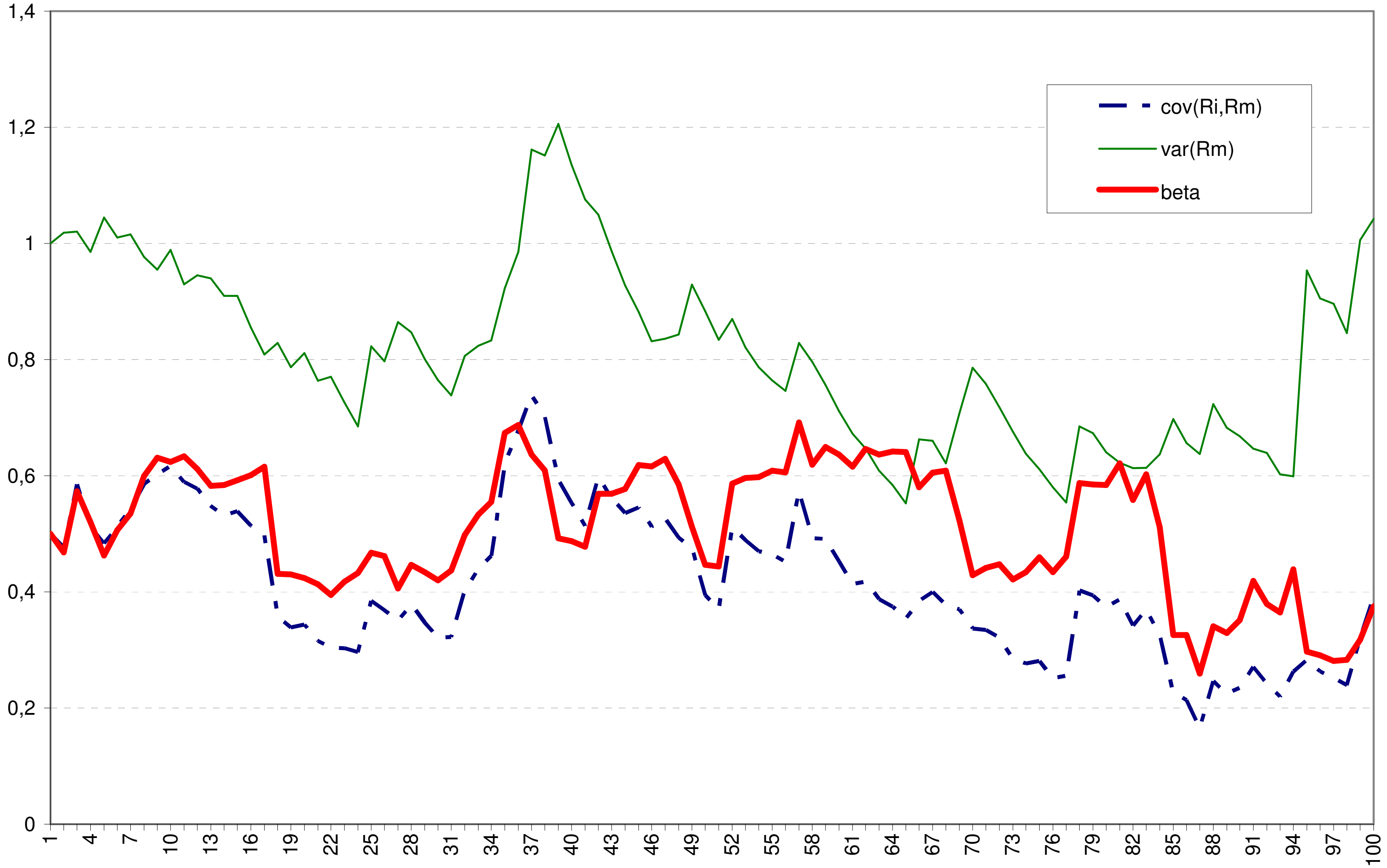
$$\beta_{it} = \frac{cov(R_{it}, R_{mt})}{var(R_{mt})}$$

$$\widehat{cov}(R_{it}, R_{mt}) = \lambda \widehat{cov}(R_{it-1}, R_{mt-1}) + (1-\lambda) R_{it-1} \cdot R_{mt-1}$$

$$\widehat{var}(R_{mt}) = \lambda \widehat{var}(R_{mt-1}) + (1-\lambda)(R_{mt-1})^2$$

  - $\lambda$ zwykle ustalane na poziomie 0,94 lub podobnym
  - wartości startowe: kowariancja i wariancja z całej próby

# Przykład: symulacja warunkowego modelu CAPM



# Hipotezy do testowania

- Im wyższe ryzyko (beta) tym wyższe stopy zwrotu
- Stopy zwrotu liniowo związane z „betą”
- Brak dodatkowego zwrotu za ryzyko nierynkowe (niesystematyczne)
- Odchylenia od równowagi losowe, nie pozwalają uzyskać nadzwyczajnych zysków

# Założenia do testowania

- Model rynkowy prawdziwy w każdym okresie

- Model CAPM prawdziwy w każdym okresie

- Parametr $\beta$ stabilny w czasie

# Testy empiryczne CAPM

- Sharpe, Cooper (1972)
  - oszacowali „bety” dla wielu akcji (60 miesięcy danych), model rynkowy
  - w każdym roku (1931-67) dzielili akcje na 10 grup o podobnych „betach”
- Wynik:
  - utrzymywanie portfeli z większymi „betami” daje w długim okresie wyższe stopy zwrotu
  - liniowa zależność między „betą” i zwrotami

$$\overline{R_i} = 5{,}54 + 12{,}75\beta_i$$

# Testy empiryczne CAPM

- Lintner / powtórzone przez Douglasa (1968)
  – Model rynkowy, roczne szeregi czasowe (1954-1963), „beta” dla 301 spółek
  – Drugie równanie:

$$\overline{R}_i = a_1 + a_2 b_i + a_3 S_{ei}^2 + \eta_i$$

Oczekiwane wartości:

$$a_3 = 0, \quad a_1 = R_F \text{ (lub } \overline{R}_Z\text{)}, \quad a_2 = \overline{R}_M - R_F \text{ (lub } \overline{R}_M - \overline{R}_Z\text{)}$$

- Wyniki: $a_1$ za duże, $a_2$ za małe, $a_3$ za duże, CAPM nie działa

# Testy empiryczne CAPM

- Miller, Scholes (1972)
  - Model do testowania CAPM przy pomocy szeregów czasowych powinien mieć postać:

    $$R_{it} = R_{Ft} + \beta_i (R_{Mt} - R_{Ft}) + e_{it}$$

  - Sprawdzić czy zależność między zwrotami i „betą” liniowa
  - „heteroskedastyczność” składnika losowego zakłóca wyniki testów
  - Błędy oszacowań „bety” w pierwszym równaniu zaniżają parametr przy „becie” w drugim, wariancja reszt skorelowana z „betą”
  - Dodatnia skośność zwrotów → wariancja reszt skorelowana ze zwrotami z portfela i

# Testy empiryczne CAPM

- Black, Jensen, Scholes (1972):

$$R_{it} - R_{Ft} = \alpha_i + \beta_i (R_{Mt} - R_{Ft}) + e_{it}$$

  – 5 lat danych, wybór 10 portfeli na następny rok zgodnie z wartościami „bet”, przesunięcie o rok okna 5 lat, itd…. (w sumie 35 lat danych)

  – Obliczone zwroty z 10 portfeli za kolejne lata jako szeregi czasowe, szacowane „bety” portfeli

  – Wyniki: nadzwyczajne stopy zwrotu z portfeli silnie skorelowane z rynkowymi, ale stałe różne od 0

# Testy empiryczne CAPM

- c.d.
  - Jeśli prawdziwy model „zero beta”

    $R_{it} = \overline{R}_Z(1-\beta_i) + \beta_i R_{Mt} + e_{it}$ to $\alpha_i = (\overline{R}_Z - R_F)(1-\beta_i)$

    stałe ujemne dla dużych „bet” i dodatnie dla małych
    → „zero beta” CAPM prawdziwy

  - regresja nadzwyczajnych zwrotów względem „bety”

    $$\overline{R}_i - R_F = 0{,}00359 + 0{,}01080\beta_i, \qquad R^2 = 0{,}98$$

    → „zero beta” CAPM prawdziwy

# Testy empiryczne CAPM

- Fama, MacBeth (1973)
  - „bety" z 20 portfeli oszacowanych w modelach szeregów czasowych
  - Regresja: dane przekrojowe, dla każdego miesiąca z lat 1935-1968

$$R_{it} = \gamma_{0t} + \gamma_{1t}\beta_i + \gamma_{2t}\beta_i^2 + \gamma_{3t}S_{ei} + \eta_{it}$$

  - Oczekiwane:

$$E(\hat{\gamma}_{3t}) = 0, \quad E(\hat{\gamma}_{2t}) = 0, \quad E(\hat{\gamma}_{1t}) > 0$$

# Testy empiryczne CAPM

- c.d.
  - Jeśli $E(\hat{\gamma}_{3t})=0, E(\hat{\gamma}_{2t})=0$ to sprawdza się $E(\hat{\gamma}_{0t}), E(\hat{\gamma}_{1t})$
    → standardowy czy „zero beta" CAPM?
  - Sprawdza się wszystkie parametry po czasie → czy „fair game"?
- Wyniki:

$$E(\hat{\gamma}_{3t})=0, autkorelacja(\hat{\gamma}_{3t})=0$$

$$E(\hat{\gamma}_{2t})=0, autkorelacja(\hat{\gamma}_{2t})=0$$

$$0<E(\hat{\gamma}_{1t})<\overline{R}_M-R_F\,,\;\; E(\hat{\gamma}_{0t})>R_F$$

$$autkorelacja(\eta_{it})=0$$

→ „zero beta" CAPM raczej niż standardowy CAPM

# Arbitrage Pricing Theory

- Wykorzystuje prawo jednej ceny
- Bez założeń o użyteczności, czy też o schemacie średniej i wariancji ze stopy zwrotu
- …ale założenie o homogenicznych oczekiwaniach
- stopy zwrotu każdego instrumentu liniowo związane ze zbiorem indeksów

# APT - założenia

$$R_i = a_i + b_{i1} I_1 + b_{i2} I_2 + \ldots + b_{ij} I_j + e_i$$

gdzie:

$$E(e_i e_j) = 0, \quad dla \quad i \neq j$$

$$E[e_i (I_j - \bar{I}_j)] = 0$$

$$E(e_i) = 0, \quad Var(e_i) = \sigma_{ei}$$

- Tylko parametry „*b*” wpływają na ryzyko systematyczne

# APT - założenia

$$\overline{R_i} = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + ... + \lambda_j b_{ij}$$

- wtedy:

$$R_F = \lambda_0$$

$$\lambda_1 = \overline{R_1} - R_F$$ itd.

- Warunek arbitrażu jest prawdziwy dla każdego podzbioru aktywów finansowych (nie potrzeba portfela rynkowego)

# Wyniki empiryczne

- Model wieloczynnikowy (proces generujący dane)

$$R_i = a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + ... + b_{ij}I_j + e_i$$

- Model APT

$$\overline{R_i} = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + ... + \lambda_j b_{ij}$$

- Każdy portfel $i$ inaczej reaguje na $I_j$
- Każdy czynnik $I_j$ oddziałuje na więcej portfeli
- Czynniki $I$ nie są zdefiniowane z góry
- „$b$”: zysk z dywidendy lub „beta”

# Wyniki empiryczne

- Szacowanie modeli APT:
  - Jednoczesne szacowanie „$b$” i „$I$”
  - Ustalenie „$I$” i szacowanie „$b$” i „lambd”
  - Ustalenie „$b$” i szacowanie „lambd”

- Analiza czynnikowa – ustalamy „$I$” i „$b$”, tak by $\mathrm{cov}()$ miedzy resztami była minimalna

# Testy empiryczne APT

- Szacowanie „$b$” + testowanie liczby czynników „$I$”

- Regresje przekrojowe analogiczne do Fama, MacBeth(1973):
  - Błędy w szacunkach „$b$”
  - Skalowanie „$b$” i „lambd” arbitralne

# Testy empiryczne

- Roll, Ross (1980)
  - 42 grupy po 30 akcji, dzienne dane 1962-1972
  - Analiza czynnikowa: 5,6 czynników. Druga regresja: 3 czynniki ważne.
- Dhrymes, Friend, Gultekin (1984)
  - 3 czynniki dla 15 akcji, 7 dla 60 akcji

# Testy empiryczne

- Brown, Weinstein (1983) testują:
  - czy stała jest identyczna w grupach
  - czy „lambdy” identyczne w grupach dla ustalonej stałej
  - czy „lambdy” i stała identyczne w grupach
- Dhrymes, Friend, Gultekin (1984)
  - Stała identyczna lub nie w zależności od metody grupowania akcji

- Problem ze skalowaniem…

# Testy empiryczne

- Connor, Korajczyk (1986):
  - asymmetric principle component analysis: 5 czynników lepiej wyjaśnia wyższe stopy zwrotu z małych firm i efekt stycznia niż CAPM
- Elton, Gruber (1982)
  - W Japonii CAPM nie działa (małe spółki mają niższe stopy zwrotu), APT jako standard

# Testy empiryczne

- Z góry ustalone „$b$" – testowany wpływ na stopy zwrotu (jak Fama, MacBeth 1973)
- Sharpe (1982): „beta" ze S&P, dividend yield, wielkość firmy, „beta" z obligacjami, historyczne wartości „alfa" (z regresji historycznych zwrotów na nadzwyczajne zwroty ze S&P)
  - 2197 akcji, miesięczne dane 1931-1979
  - Wyniki sugerują APT.

- **Ustalone** „*I*”:
- Chen, Roll, Ross (1986): inflacja, struktura terminowa stóp procentowych, premia za ryzyko, produkcja przemysłowa
  - Czy skorelowane z „*I*” z analizy czynnikowej (Roll, Ross), czy „*I*” wyjaśniają stopy zwrotu?
  - Tak, tak.
- Burmeister,McElroy (1988): „<u>default risk</u>”, „<u>time premium</u>”, „deflation”, przyrost oczekiwanej sprzedaży, <u>reszty z rynkowych stóp zwrotu</u>
  - APT model nie gorszy niż model czynnikowy i lepszy niż CAPM

- Ustalone „$I$” jako portfele (niekoniecznie rynkowe)
- Fama, French (1993): różnica między zwrotami z portfeli małych i dużych spółek, różnica między zwrotami z portfeli różniących się B/M, „term premium”, „default premium”

# APT i CAPM

- Możliwa zgodność obu modeli

$$\overline{R}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

$$\lambda_1 = \beta_{\lambda 1}(\overline{R}_M - R_F) \quad \lambda_2 = \beta_{\lambda 2}(\overline{R}_M - R_F)$$

$$\overline{R}_i = \lambda_0 + b_{i1}\beta_{\lambda 1}(\overline{R}_M - R_F) + b_{i2}\beta_{\lambda 2}(\overline{R}_M - R_F) =$$
$$= R_F + (b_{i1}\beta_{\lambda 1} + b_{i2}\beta_{\lambda 2})(\overline{R}_M - R_F)$$